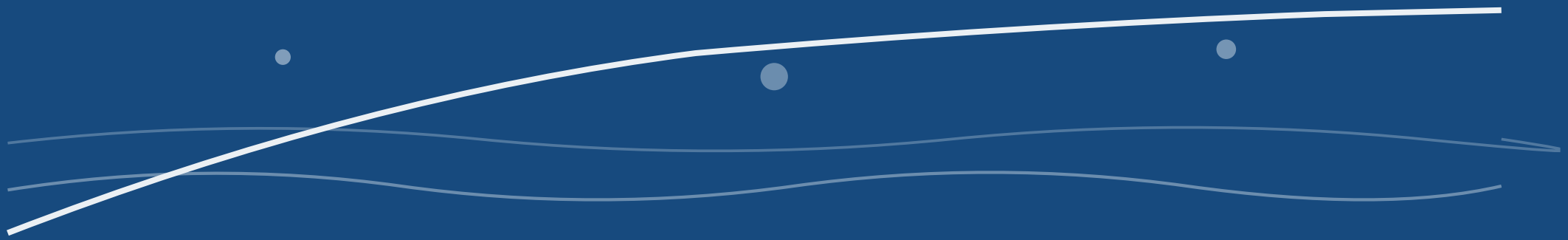
《黏性流体力学》课程

第 8 章

湍流黏性流动与数值模拟导论

从 Reynolds 分解到可信 CFD：湍流统计、近壁物理与数值方法

徐翱



学习目标：学完本章，你能回答什么？

完成本章学习后，你将能够——

01 区分层流、转捩与湍流的物理特征，理解失稳与转捩的基本概念

02 认识湍流的非规则性、三维性、多尺度性、强输运与耗散性，及其与相干结构的关系

03 区分时间平均、空间平均与系综平均，理解各态历经性的含义

04 掌握 Reynolds 分解与平均运算规则，推导 RANS 方程，解释 Reynolds 应力来源

05 理解涡黏性假设、湍动能 k、耗散率 ε 及生产—输运—耗散能量链

06 掌握摩擦速度、壁面单位与 y^+、Re_τ，读懂近壁分区与壁面律

07 区分 DNS、LES、RANS 的思想与成本，认识常见 RANS 模型假设与局限

08 理解有限体积离散、CFL 与压强—速度耦合，掌握网格/时间步检查与 verification / validation

本章贯穿主线

黏性作用 → 控制方程 → 尺度与无量纲参数 → 流动结构 → 工程应用 → 数值计算

核心问题：黏性如何影响流体运动？湍流如何改变动量输运？数值计算如何求解黏性流动？

教学重点与难点：讲什么、难在哪？

教学重点

- Reynolds 分解与 RANS 方程推导，Reynolds 应力的物理意义
- 湍动能方程与"生产—输运—耗散"能量链
- 壁面单位 u_τ、y^+ 与近壁分区、壁面律
- DNS / LES / RANS 三种方法的思想比较
- CFD 可信度检查：网格独立性、verification 与 validation

教学难点

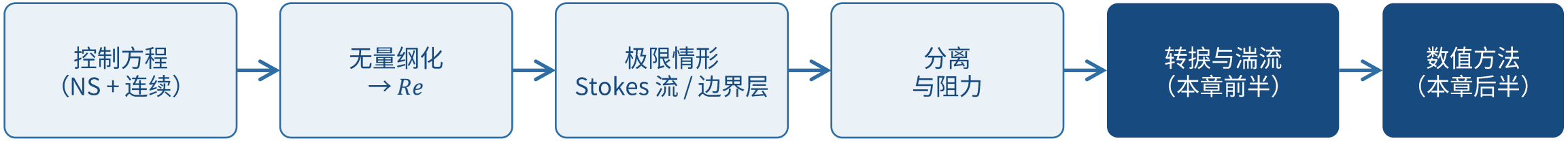
- 平均之后未知量反而增加——闭合问题如何产生
- Reynolds 应力为何"名为应力、实为动量通量"
- 高 Re 下黏性为何仍不可忽略（近壁与耗散）
- y^+ 目标必须与近壁处理方式绑定
- 迭代收敛 $\neq$ 网格收敛 $\neq$ 物理正确

教学策略：问题驱动 + 预测—判断—估算；每个方程先问"哪一项对应什么物理作用"；用尺度分析连接物理与计算；用例题与 CFD 可信度讨论强化工程直觉。

本章在课程中的位置：一条主线走到湍流

前七章已建立：黏性应力来源 → 控制方程 → 无量纲化与 Re → 精确解 → Stokes 流 / 边界层 → 分离与尾迹。全部建立在"层流"图景之上。
本章解决的新问题：Re 继续增大，流动失稳并三维化——层流图景被湍流与数值方法取代。

全书主线链条（本章与前后章节的衔接）



本章任务

用统计方法描述湍流，建立 Reynolds 平均方程；用尺度与壁面单位理解近壁物理；用 DNS / LES / RANS 与 CFD 可信度框架回答"怎么算、算得可信吗"。

后续课程衔接

本章建立的湍流统计、近壁理论与数值方法框架，将直接服务于空气动力学、传热学与计算流体力学等后续课程。

本章知识结构：四大模块一条主线

A 湍流的物理图景	B 统计描述与方程	C 壁湍流与近壁物理	D 数值方法
8.1 失稳与转捩 8.2 五大基本特征 · 能量级联 · 能谱三区 · 相干结构	8.3 三种平均 · Reynolds 分解 · 平均规则 8.4 RANS 方程 · Reynolds 应力 · 闭合问题 8.5 涡黏性 · k, ε · 能量链	8.6 壁面单位 u_τ, y^+ · 近壁分区与壁面律 · 总剪切与有效黏性 · 层流 / 湍流阻力	8.7 DNS / LES / RANS · 湍流模型 8.8 FVM · CFL · 压强—速度耦合 · 可信度检查

全章教学路径：问题驱动、步步推进

物理观察 → 统计建模 → 方程简化 → 物理解读 → 数值验证 → 评价反馈

全章统一思想：湍流不是一种新流体，而是 Navier–Stokes 方程在一定参数范围内的复杂运动状态；统计规律与相干结构是互补的两种描述。

湍流看似“混乱”，
为什么仍然离不开黏性？

学这一章之前，你很可能卡在这里——

困惑 1　瞬时速度乱跳，“统计稳定”到底稳的是什么？
困惑 2　对方程取平均，为什么未知量反而变多了？
困惑 3　Re 很大，黏性是不是就可以丢掉了？

本章将用三条路回答：
统计描述（8.3–8.5）→ 近壁物理（8.6）→ 数值方法（8.7–8.8），并最终在 8.9 节回到全书的黏性主线。

8.1 层流在什么条件下失去稳定?

什么是层流?

- 结构相对规则，不同流层之间混合较弱
- 瞬时速度与压强变化较平滑
- 可在给定边界条件下保持稳态或规则非稳态
- 典型例子：Couette 流、Poiseuille 流、Blasius 边界层（第 4、6 章）

扰动从哪里来?

任何真实流动都不可能完全没有扰动：
入口波动 · 壁面粗糙度 · 环境振动 · 声波 · 热噪声 · 上游尾迹 · 数值误差
关键认识：层流是"扰动尚未放大"的状态，而不是"完全没有扰动"的状态。

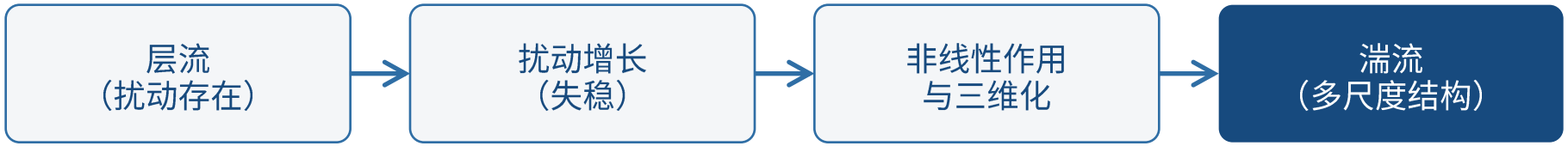
数学表述：瞬时速度可写为基本流加扰动
$u = U + u'$　其中 \boldsymbol{U} 为基本流，u' 为扰动
问题随之而来：扰动会衰减还是增长？——这正是"稳定性"问题。

8.1 稳定、失稳与转捩：扰动如何“长大”？

稳定：小扰动随时间衰减，$|u'(t)| \to 0$
失稳：某些扰动随时间增长，$|u'(t)| \uparrow$
例：圆柱尾迹低 Re 稳态对称，超过某范围后周期涡脱落（第 7 章）。

转捩（transition）：流动从层流状态，经过扰动增长、非线性作用与三维化，最终形成湍流的过程。
注意：转捩不是由一个普适 Reynolds 数唯一决定的。

转捩的概念链



转捩还受什么影响？来流湍流度 · 壁面粗糙度 · 压强梯度 · 几何曲率 · 声学扰动 · 表面振动
本章边界：不展开完整线性稳定性理论（Orr–Sommerfeld 等），只保留一个关键认识——
湍流通常不是凭空出现，而是某些扰动在特定流动条件下被放大并经过非线性演化的结果。

8.1 Reynolds 圆管实验：一张图看懂“转捩”

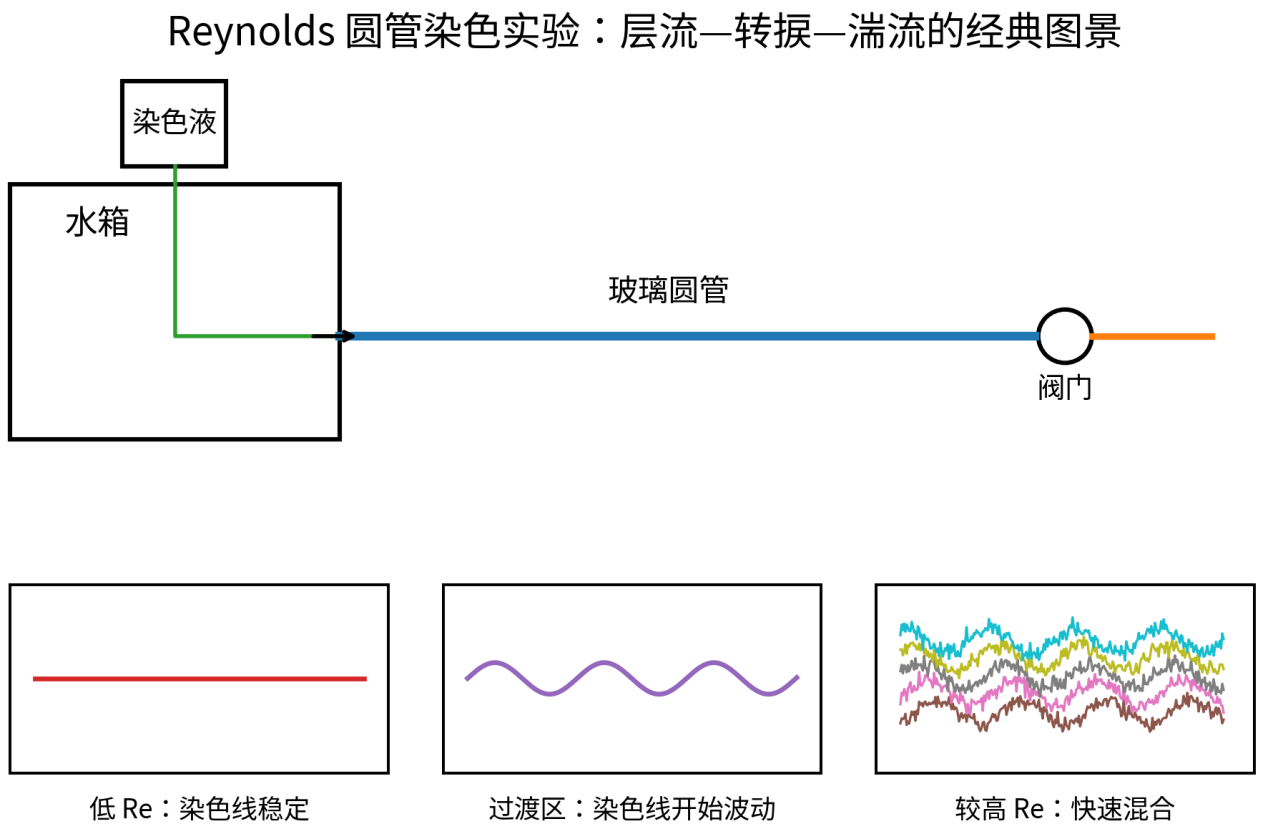


图 8.1 Reynolds 圆管染色实验：层流—转捩—湍流的经典图景（教材图）

这张图告诉我们：

- 低 Re：染色线稳定 → 层流
- 过渡区：染色线波动 → 扰动增长、转捩
- 较高 Re：快速混合 → 湍流

物理图像：实验说明转捩与惯性—黏性竞争有关——Re 增大意味着惯性作用增强，扰动更易被放大。

但要小心：实际转捩还受入口扰动、壁面粗糙度等因素影响。

阅读要点：注意三个状态之间是“渐变”而非“突变”；染色线形态是流态的直接可视证据。

8.1 课堂互动：临界 Reynolds 数是“普适常数”吗？

请判断：能否用一个普适的临界 Reynolds 数，作为所有流动的层流—湍流分界？

A. 可以 —一个 Re 数判据适用于所有流动

B. 不可以 转捩还依赖扰动环境与几何

同桌讨论（2 分钟）：
圆柱绕流约 $Re \approx 40$ 出现周期涡脱落，而圆管转捩约在 $Re \approx 2300$ 附近——
这两个“临界值”为什么差这么多？它们各自还受什么因素影响？

答案与解析见教师备注；先讨论，再揭晓。

湍流是“完全随机”的吗?

看瞬时速度，它乱得没有规律；但湍流真的毫无结构吗?

困惑 1　瞬时信号剧烈波动，“统计稳定”到底稳的是什么?
困惑 2　大涡、小涡同时存在，尺度差很多——它们如何组织?
困惑 3　既然大尺度靠惯性，黏性在哪里还在起作用?

本节将回答：湍流的五大基本特征、能量如何在尺度间传递（级联与能谱）、以及为什么“非规则”不等于“无结构”（相干结构）。

8.2 湍流的五大基本特征：乱中有“律”

湍流没有一句话能概括的完整定义，但通常具有若干共同特征；这些特征彼此相连，共同构成湍流的物理图景。

01 非规则性 即使平均流动稳定，瞬时速度仍呈复杂、非周期波动；“统计稳定”指统计量在足够长观察时间内保持稳定。

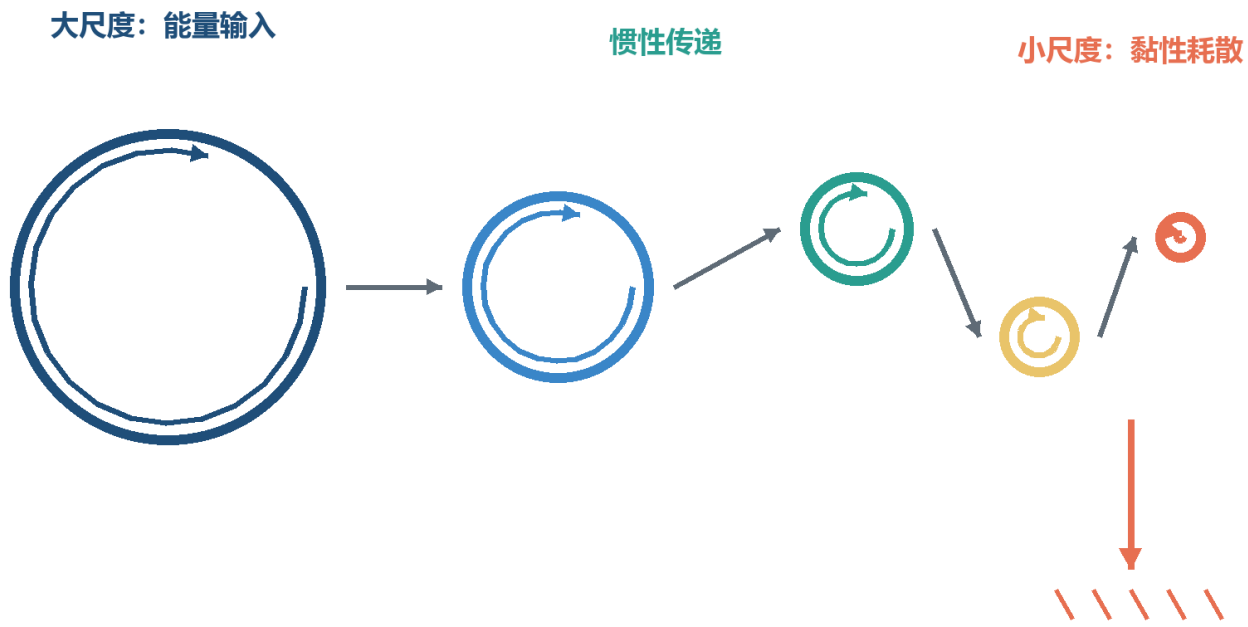
02 三维性 充分发展的湍流本质上是三维的；涡量拉伸与倾斜使不同尺度间持续交换能量，即使几何与平均流动看似二维。

03 多尺度性 大尺度含能运动、中间尺度涡结构、小尺度耗散运动同时存在并相互作用。

04 强混合与强输运 流体团的上下交换把高动量流体带向近壁、低动量流体带向外侧，显著增强动量、热量与质量输运。

05 耗散性 大尺度运动可由惯性主导，但机械能最终在小尺度上由分子黏性耗散——**黏性只是集中到小尺度和近壁区域，而非消失**。

8.2 能量级联：能量如何一路“流”到小尺度？



湍动能由大尺度向小尺度传递，最终由分子黏性转化为内能

图 8.2 湍流能量级联概念示意：大尺度 → 惯性传递 → 黏性耗散（教材图）

这张图告诉我们：

- 大尺度：能量输入（外部驱动与几何）
- 中间：惯性传递（尺度逐级递减）
- 小尺度：分子黏性耗散 → 内能

关键认识：

- 能量级联是物理空间中的尺度递减图像
- 大尺度运动可由惯性主导，但耗散必须由分子黏性完成
- 黏性没有消失，只是集中到小尺度

同一过程在波数空间的表达，就是下一页的能谱。

8.2 能谱三区：把级联写进波数空间

定义：能谱曲线下的面积给出单位质量湍动能

$$k = \int_0^\infty E(\kappa_s)\,\mathrm{d}\kappa_s$$

其中 κ_s 为波数，$E(\kappa_s)$ 为三维能谱。

三个区域：

- 含能区（低波数）：大尺度运动，能量由外部驱动与几何产生
- 惯性区（中波数）：近似无黏的尺度间传递，可能出现 $-5/3$ 标度
- 耗散区（高波数）：速度梯度大，分子黏性把动能转化为内能

注：中等 Re 流动三区间并无清晰界面。

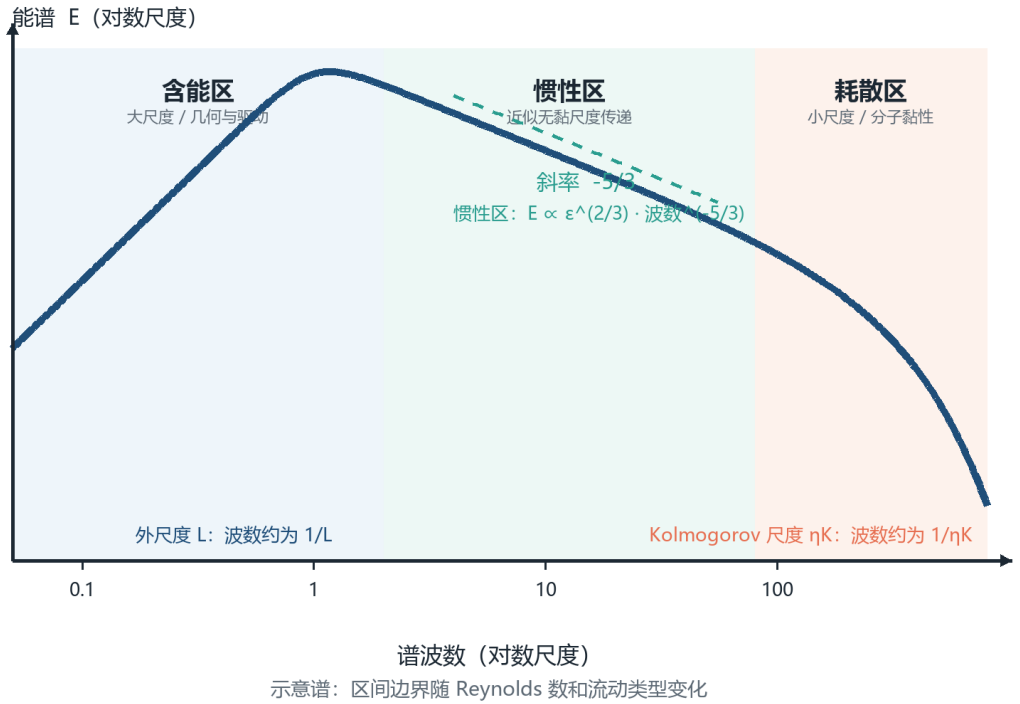


图 8.3　湍流能谱双对数示意：含能区 / 惯性区 / 耗散区（教材图）

读图要点：小波数 = 大尺度（含能）；大波数 = 小尺度（耗散）；$-5/3$ 是惯性区的局部标度，不是整条谱都必须服从的幂律。

8.2 课堂互动：惯性区的谱线长什么样?

回看能谱图：在双对数坐标中，惯性区 $E(\kappa_s)$ 随波数 κ_s 增大的变化趋势是——?

A 平坦不变

B 按 $\kappa_s^{-5/3}$ 近似直线下降

C 迅速上升

再想一想：

经典 Kolmogorov 标度 $E \propto \varepsilon^{2/3}\kappa_s^{-5/3}$ 描述的是“惯性传递段”的尺度关系。
为什么它只在惯性区成立，而不能外推到含能区与耗散区?

答案与解析见教师备注。

8.2 相干结构：非规则不等于无结构

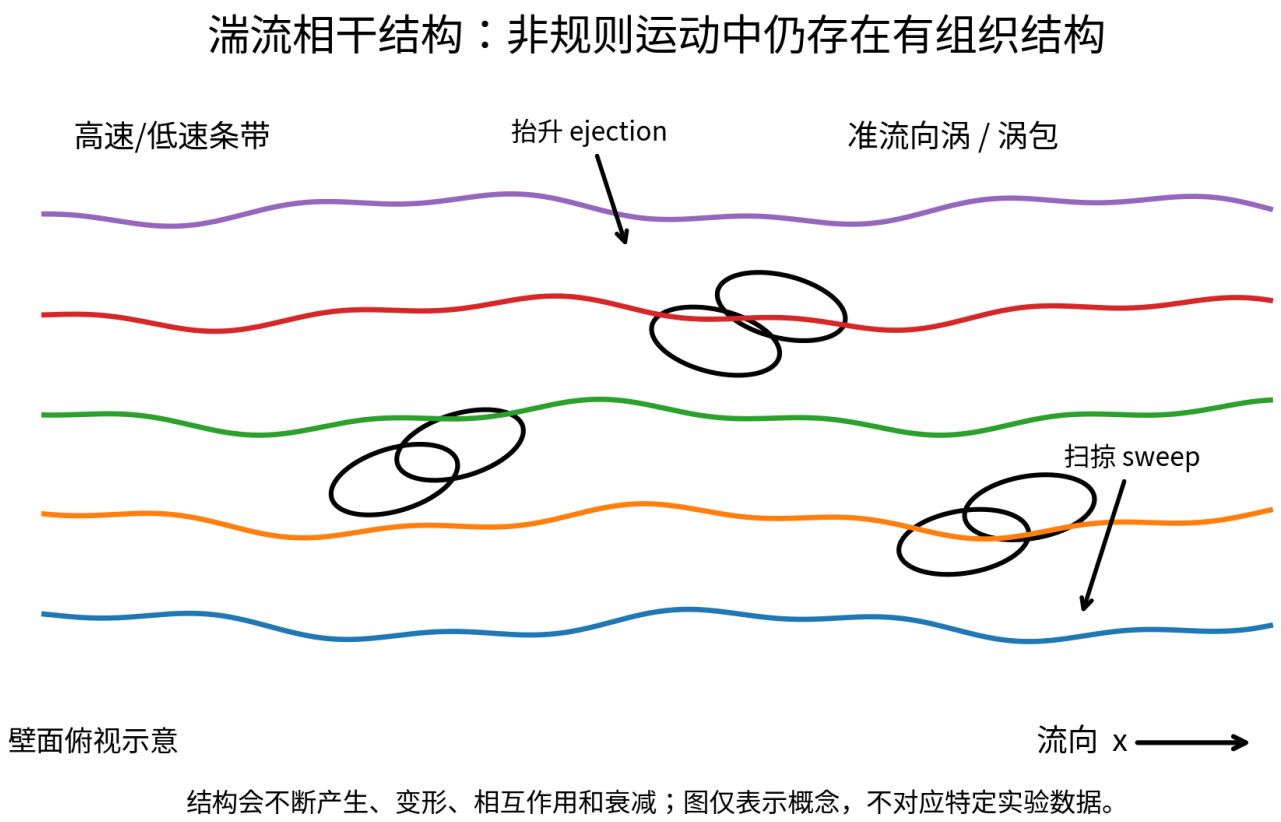


图 8.4 湍流相干结构概念示意：条带、准流向涡、抬升与扫掠（教材图）

这张图告诉我们：

- 近壁高速 / 低速条带
- 准流向涡、剪切层卷起
- 抬升（ejection）与扫掠（sweep）等有组织运动

关键认识：

- 相干结构有有限空间尺度和寿命，在产生、变形、相互作用与衰减中维持组织性
- 它们承担显著的动量、热量与能量输运

统计描述与结构描述互补：Reynolds 平均描述统计作用，瞬时结构解释背后的物理。

为什么要用统计来描述湍流?

逐时刻描述完整瞬时场，信息量太大；工程真正关心的是什么?

困惑 1 工程要的是平均速度、平均阻力、平均传热、脉动强度——它们如何从瞬时场提取?
困惑 2 “平均”到底怎么定义才合理?时间、空间还是多次实验?
困惑 3 平均之后，原来简单的方程会不会变复杂?

本节将回答：三种平均方式及其适用条件（8.3.1）、Reynolds 分解与平均运算规则（8.3.2–8.3.3），为 8.4 的 RANS 方程推导做好准备。

8.3 三种平均：时间、空间与系综

① 时间平均

$$\bar{\phi} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi\,(t)\,\mathrm{dt}$$

适用于统计平稳流动；实际用有限采样，须判断采样时间是否统计收敛。

② 空间平均

$$\langle \phi \rangle_x = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \phi\,(x, \ldots, t)\,\mathrm{dx}$$

要求该方向统计齐次（如周期方向）；边界层法向 y 方向统计性质变化显著，不能随意平均。

③ 系综平均

$$\langle \phi \rangle_e = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \phi^{(n)}$$

相同宏观条件下做 N 次独立实现；表达"对许多可能实现"的平均。

时间平均与系综平均的联系——各态历经（ergodicity）：
对统计平稳且满足遍历条件的湍流，足够长的时间平均可以用来估计系综平均——这正是"实验中记录一条足够长时间序列、或 DNS 中长时间采样有意义"的原因。
但注意：各态历经不保证任意有限时间平均等于系综平均；长相关时间或低频大尺度运动需要更长记录，仍有有限采样误差。

8.3 全章统一约定：四类速度记号

记号	类别	定义与用途
$u_i(x,t)$	瞬时量	Navier–Stokes 方程直接描述的瞬时速度分量
$\overline{u}_i$	Reynolds 平均量	时间/系综平均；统计齐次方向可结合空间平均；RANS 求解的基本变量
$u_i' = u_i - \overline{u}_i$	脉动量	相对 Reynolds 平均的速度脉动，满足 $\overline{u}_i' = 0$
$\widetilde{u}_i$	LES 滤波量	对瞬时速度空间滤波后由网格解析的速度分量（8.7 使用）

易错点：上横线与波浪线代表不同运算。
u_i' 是 Reynolds 脉动；$u_i^{sgs} = u_i - \widetilde{u}_i$ 是 LES 中未解析的亚格子部分——二者不能混用。
后面推导 RANS 用 $\overline{\cdot}$，推导 LES 用 $\widetilde{\cdot}$，符号即运算。

8.3 Reynolds 分解：瞬时量 = 平均量 + 脉动量

任意瞬时物理量：

$\phi = \bar{\phi} + \phi'$

速度与压强：

$u_i = \bar{u}_i + u_i'$，$p = \bar{p} + p'$

定义保证：

$\overline{\phi'} = 0$（脉动的平均为零）

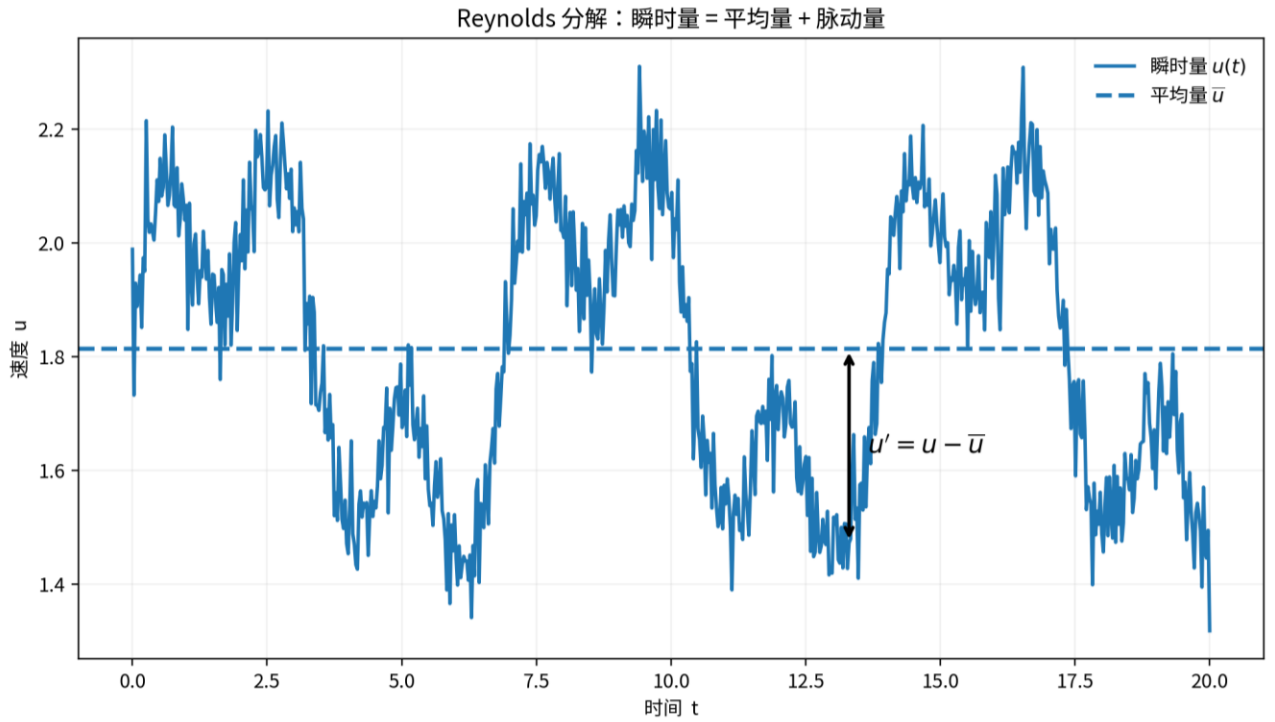


图 8.5　Reynolds 分解示意：瞬时信号 = 平均量 + 脉动量（教材图）

这张图告诉我们：蓝色实线是剧烈波动的瞬时量 $u(t)$，虚线是近似不变的平均量 $\bar{u}$，双向箭头即脉动量 $u' = u - \bar{u}$。

物理意义：“统计稳定”不是每时刻不变，而是平均量稳定；脉动量围绕平均值上下波动，其平均为零。

8.3 平均运算规则：乘积的平均 ≠ 平均的乘积

线性运算：
$\overline{\phi+\psi}=\bar{\phi}+\bar{\psi}$，$\overline{c\,\phi}=c\,\bar{\phi}$（$c$ 为常数）
推论：脉动平均为零 $\overline{\phi'}=0$；平均量与脉动量乘积的平均为零 $\overline{\bar{\phi}\,\psi'}=0$。

乘积平均（关键）：
$\overline{\phi\,\psi}=\bar{\phi}\,\bar{\psi}+\overline{\phi'\,\psi'}$
易错点：两个脉动乘积的平均一般不为零 $\overline{\phi'\psi'}\neq 0$——脉动之间存在统计关联。

对 NS 方程最要紧的一条：

$$\overline{u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\bar{u}_j\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\overline{u_j{}'\,\frac{\partial u_i{}'}{\partial x_j}}$$

物理解读：对非线性对流项取平均，会留下脉动关联项——这正是 Reynolds 应力进入平均动量方程的入口（8.4）。

8.3 课堂互动：乘积的平均等于什么？

设 $u = \bar{u} + u'$、$v = \bar{v} + v'$。
请判断：$\overline{u\,v}$ 等于下列哪一项？

A $\bar{u}\,\bar{v}$（脉动平均为零）

B $\bar{u}\,\bar{v} + \overline{u'v'}$

C $\bar{u}\,\bar{v} - \overline{u'v'}$

追问：就算 $\bar{u'} = \bar{v'} = 0$，$u'v'$ 一定为零吗？
想一想：近壁湍流中，向上的流体团往往带着较低流向速度——这会造成 u' 与 v' 怎样的统计关联？

答案与解析见教师备注。

把 Reynolds 分解代回 NS 方程，会发生什么？

平均后方程会变简单，还是变复杂？

困惑 1　连续性方程取平均，会变成什么？
困惑 2　动量方程里哪一项会"生出"新统计量？
困惑 3　多出来的项到底是什么物理过程，能让方程直接求解吗？

本节将回答：平均连续性方程（8.4.1）、RANS 方程与 Reynolds 应力（8.4.2）、湍流为何增强动量输运（8.4.3）、闭合问题（8.4.4）。

8.4 第一步：连续性方程取平均

瞬时连续性方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

代入 $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ **并取平均：**

$$\frac{\partial \bar{u_i}}{\partial x_i} = 0$$

两式相减，得脉动连续性方程：

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

结论：平均速度场仍满足不可压缩连续性方程；脉动速度场也无散。

现在看瞬时动量方程——哪一项会"生事"？

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

线性项：非定常项、压强梯度项、黏性项——对未知量线性，平均后形式不变。

非线性项：对流项 $u_j \partial u_i / \partial x_j$——代入分解并取平均后，会产生脉动关联的额外项。

8.4 对流项的平均：Reynolds 应力如何“长出来”

Step 1 代入分解并取平均（x 方向为例）：

$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}=\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+w'\frac{\partial u'}{\partial z}}$$

含单个脉动量的交叉项平均后为零（如 $\overline{u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}=0$）。

Step 2 用脉动连续性方程改写为散度形式：

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+w'\frac{\partial u'}{\partial z}=\frac{\partial(u'u')}{\partial x}+\frac{\partial(u'v')}{\partial y}+\frac{\partial(u'w')}{\partial z}$$

于是平均动量方程中出现了 $\partial\overline{u'u'}/\partial x+\partial\overline{u'v'}/\partial y+\partial\overline{u'w'}/\partial z$。

关键结论：Reynolds 应力不是人为加进方程的，它来自原始 Navier–Stokes 方程非线性对流项的平均。

8.4 RANS 方程：每一项分别代表什么？

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$$

不可压缩 Reynolds 平均 Navier–Stokes 方程（RANS），指标形式

① **非定常项**　平均动量随时间的变化率
② **对流项**　平均速度场携带的平均动量输运（惯性作用）
③ **平均压强梯度项**　平均压力梯度驱动的力
④ **分子黏性项**　由分子黏性产生的动量扩散
⑤ **Reynolds 应力散度项**　脉动速度关联产生的额外平均动量通量——湍流输运的"入口"

8.4 Reynolds 应力张量：六个独立分量的分工

定义：

$\tau_{ij}^R = -\rho\,\overline{u_i' u_j'}$

在平均动量方程中以应力散度 $\partial\tau_{ij}^R/\partial x_j$ 出现。

三个法向分量：

$-\rho\overline{u'^2}, -\rho\overline{v'^2}, -\rho\overline{w'^2}$

与各方向速度脉动强度（脉动动能）有关。

三个剪切分量：

$-\rho\overline{u'v'}, -\rho\overline{u'w'}, -\rho\overline{v'w'}$

表示不同方向脉动之间的相关；壁面剪切流中 $-\rho\overline{u'v'}$ 尤其重要。

注意：它来自脉动引起的平均动量通量，不是分子本构产生的真实黏性应力。

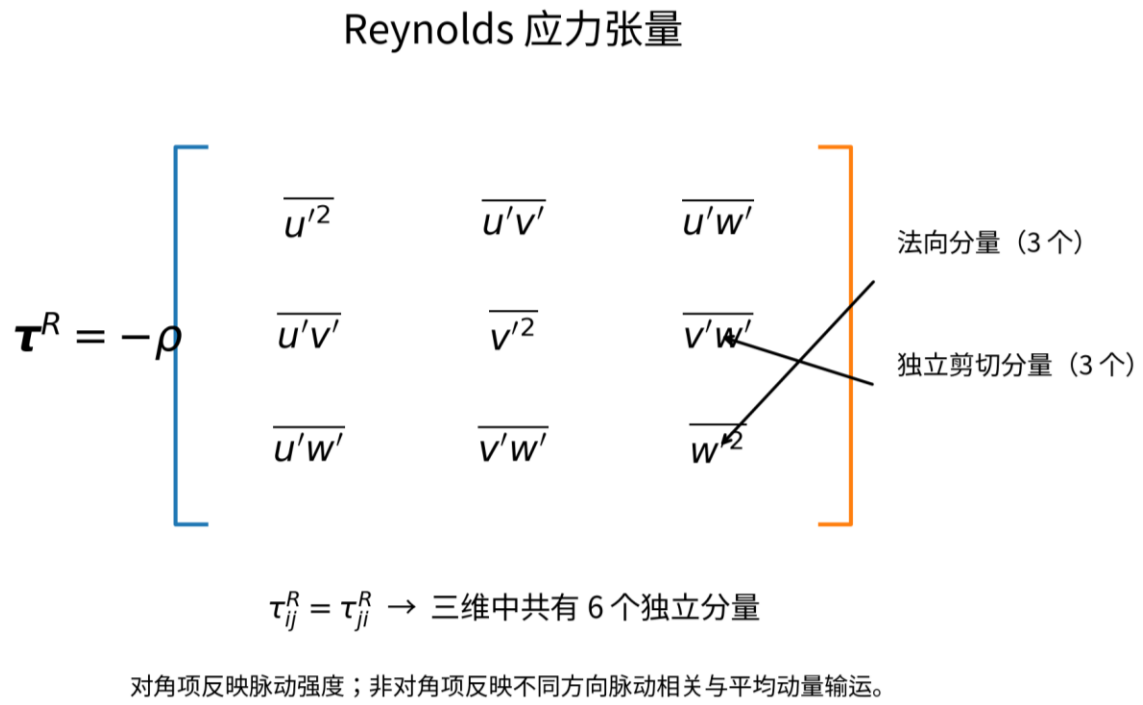


图 8.6　Reynolds 应力张量的六个独立分量（教材图）

8.4 湍流为什么增强动量输运?

平均流速随 y 增加： $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y > 0$
高位置的高速流体向下运动： $v' < 0$、$u' > 0$
低位置的低速流体向上运动： $v' > 0$、$u' < 0$
两种情况下都有： $u'v' < 0$

典型壁面剪切流中：
$u'v' < 0$，$-\rho\overline{u'v'} > 0$
物理图像：湍流脉动持续把高动量流体向壁面输运，同时把低动量流体向外输运——像“搅拌”一样跨层交换动量。

核心结论（教材原句）：
Reynolds 剪切应力的核心物理含义，是脉动速度相关所产生的**平均跨层动量输运**。
工程含义：壁面处平均速度梯度大 → 壁面摩擦阻力大；同时传热传质被显著增强（8.6 与全课程反复使用）。

8.4 课堂互动：脉动关联的符号怎么判断?

近壁剪切流中 $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y > 0$。
一团来自较高位置的高速流体向下运动（$v' < 0$、$u' > 0$）。
这类事件对 $u'v'$ 的平均贡献是——?

A 正贡献（$u'v' > 0$）

B 负贡献（$u'v' < 0$）

C 无贡献（平均为零）

再想一想： 低速流体向上运动（$v' > 0$、$u' < 0$）呢?
两类事件叠加后，$u'v'$ 与 $-\rho\overline{u'v'}$ 的符号各是什么?

答案与解析见教师备注。

8.4 闭合问题：方程为什么变“多”了？

瞬时 NS 方程：未知量为三个速度分量与压强，共 4 个未知量，方程组闭合。
RANS 方程：平均后新增
$u_i'u_j'$
三维中 Reynolds 应力张量有 **6 个独立分量**。

闭合问题：平均虽然去除了瞬时小尺度细节，却产生了新的未知统计量——方程数少于未知量数，方程组不再闭合。
出路：必须建立 Reynolds 应力与平均流动之间的附加关系，这些关系统称为**湍流模型**。

这就是“湍流建模”的必要性：

- 8.5：Boussinesq 涡黏性假设（把 Reynolds 应力与平均应变率联系起来）
- 8.7：k–ε、k–ω 等模型的层级与选用

工程含义：RANS 的精度上限由湍流模型决定——模型假设的适用边界就是计算的适用边界。

Reynolds 应力怎么闭合?

能不能像黏性应力那样，用平均应变率来“模仿” Reynolds 应力?

困惑 1 “涡黏度”和分子黏度是一回事吗?
困惑 2 湍动能从哪里来、到哪里去?
困惑 3 平均流能量 → 湍动能 → 黏性耗散，这条链为什么完整?

本节将回答：Boussinesq 涡黏性假设（8.5.1）、湍动能与生产项（8.5.2）、湍动能方程与能量链——并配例题 8.1 计算实践。

8.5 Boussinesq 涡黏性假设：向牛顿定律“借形式”

简单平行剪切流：

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}$$

形式上类似 Newton 黏性定律 $\tau = \mu\,\mathrm{d}U/\mathrm{d}y$。

三维张量形式（教材拓展框）：

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = 2\mu_t\bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\,\delta_{ij}$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

偏量部分与平均应变率相连；各向同性部分由 k 表示。

分子黏度 vs 涡黏度——这是最容易被误用的一对概念：

ν（运动黏度）是**流体物性**；ν_t（涡黏度）**不是流体材料常数**——它取决于流动位置、Reynolds 数、平均剪切、湍流结构以及所采用的湍流模型。

教材结论：ν_t 是描述湍流平均动量输运的一种模型量，而不是分子尺度物性。

例 8.1　从统计量算湍动能、Reynolds 剪切应力与生产项

已知（壁面剪切流测点）：

$\overline{u'^2} = 1.44$，$\overline{v'^2} = 0.36$，$\overline{w'^2} = 0.25\ \mathrm{m^2/s^2}$

$\overline{u'v'} = -0.18\ \mathrm{m^2/s^2}$

$\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y = 80\ \mathrm{s^{-1}}$，$\rho = 1.20\ \mathrm{kg/m^3}$

求：（1）湍动能 k；
（2）Reynolds 剪切应力 $-\rho\overline{u'v'}$；
（3）单位质量湍动能生产率 $\mathcal{P}$ 及单位体积生产率 $\rho\mathcal{P}$。

（1） $k = \frac{1}{2}(1.44 + 0.36 + 0.25) = 1.025\mathrm{m^2/s^2}$

（2） $-\rho\overline{u'v'} = -(1.20)(-0.18) = 0.216\mathrm{Pa}$

（3） $\mathcal{P} = -\overline{u'v'}\,\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} = -(-0.18)(80) = 14.4\mathrm{m^2/s^3} = 14.4\mathrm{W/kg}$

$\rho\mathcal{P} = (1.20)(14.4) = 17.28\mathrm{W/m^3}$

结果解释：$\overline{u'v'} < 0$ 与正梯度 $\rightarrow \mathcal{P} > 0$，平均流能量转移到脉动；k、Reynolds 应力与 $\mathcal{P}$ 不能互相替代。

数字赋能　用 Python 重算例 8.1

为什么用代码？输入统计量 → 按教材公式计算 → 快速验证手算结果，并便于做参数敏感性实验。
先预测：k、Reynolds 剪切应力、P 的数值与符号应是什么？

核心代码：

```
# 例 8.1：壁面剪切流湍流统计量
u2, v2, w2 = 1.44, 0.36, 0.25 # m^2/s^2
uv = -0.18 # m^2/s^2
du_dy = 80.0 # 1/s
rho = 1.20 # kg/m^3
k = 0.5*(u2 + v2 + w2) # 湍动能
tau_R = -rho*uv # Reynolds 剪切应力
P = -uv*du_dy # 单位质量生产率
print(f"k = {k:.3f} m^2/s^2")
print(f"tau_R = {tau_R:.3f} Pa")
print(f"P = {P:.1f} W/kg, rho*P = {rho*P:.2f} W/m^3")
```

程序输出（应验证手算）：

```
k = 1.025 m^2/s^2
tau_R = 0.216 Pa
P = 14.4 W/kg
rho*P = 17.28 W/m^3
```

物理解读：

- k>0：三方向脉动总强度
- tau_R>0：正 Reynolds 剪切应力，动量向壁面输运
- P>0：平均流能量持续注入脉动（能量链第一环）
- 若 u'v' 平均变号，P 会变号吗？（会——生产项符号由相关性与梯度共同决定）

8.5 湍动能 k 与生产项：能量从哪里进入湍流？

单位质量湍动能：

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$$

反映三个方向速度脉动的整体强度。

生产项（壁面剪切流）：

$$\mathcal{P} = -\overline{u'v'}\,\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}$$

若 $-\overline{u'v'} > 0$ 且 $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y > 0$，则 $\mathcal{P} > 0$——平均流通过 Reynolds 剪切应力向湍流脉动输送能量。

为什么用花体 $\mathcal{P}$？ 湍动能生产项用花体 $\mathcal{P}$；普通斜体 P 保留给第 8.8 节有限体积离散中的当前控制体——全章符号统一。

k 与生产项的互补性： k 只反映三个方向的脉动强度；Reynolds 剪切应力与 $\mathcal{P}$ 还包含分量之间的相关性——三者不能互相替代（例 8.1）。

8.5 湍动能方程与能量链：能量守恒如何闭环？

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=\underbrace{-\overline{u_i{}'u_j{}'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\mathcal{P}\text{生产}}\underbrace{-\frac{\partial \mathcal{T}_j}{\partial x_j}}_{\text{输运}}-\underbrace{\varepsilon}_{\text{耗散}}$$

三项各自的角色：

- $\mathcal{P}$ 生产：平均动能与湍动能之间的转换（可正可负）
- 输运 $\mathcal{T}_j=\frac{1}{2}\overline{u_i{}'u_i{}'u_j{}'}+\frac{\overline{p'u_j{}'}}{\rho}-\nu\frac{\partial k}{\partial x_j}$：在空间中重新分配，不必处处为正或为负
- 耗散 $\varepsilon=2\nu\,\overline{s'_{ij}s'_{ij}}\geq 0$：以确定非负速率把湍动能转化为内能

能量链（教材结论）：

平均流动能量 → 湍动能 → 尺度间传递 → 分子黏性耗散

这正是理解"高 Reynolds 数湍流中黏性为什么仍然不可缺少"的关键。

8.5 课堂互动：生产项一定为正吗？

关于湍动能生产项 $\mathcal{P} = -\overline{u'v'}\,\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y$，
以下说法正确的是——？

A 任何位置都恒为正

B 典型附着壁湍流中为正，但不保证处处为正

C 恒为负（湍流只会耗散能量）

再想一想：在逆压梯度引起的分离区附近，$\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y$ 可能接近零或变号——此时 $\mathcal{P}$ 的符号还确定吗？这对能量链意味着什么？

答案与解析见教师备注。

为什么高 Reynolds 数流动仍受黏性控制?

远离壁面时湍流输运占优，但壁面附近呢?

困惑 1　无滑移条件对脉动意味着什么?
困惑 2　壁面剪切由谁承担——分子黏性还是湍流输运?
困惑 3　近壁需要什么“尺子”来度量距离?

本节将回答：近壁黏性作用与壁面单位（8.6.1）、近壁分区与壁面律（8.6.2）、总剪切应力与等效输运（8.6.3）——并配例题 8.2。

8.6 壁面单位：用局部壁面剪切做“尺子”

无滑移 → 壁面处 $u' = v' = w' = 0$，从而 $-\overline{u'v'} = 0$：壁面剪切只能由分子黏性承担

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right|_w$$ （局部切向坐标下的有符号量，符号约定同第 2 章）

结论：无论整体 Reynolds 数多高，足够靠近固壁时分子黏性仍占主导。

摩擦速度：

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$

由壁面剪切应力大小构造的非负速度尺度，**不是某个流体质点的实际速度**。

无量纲速度与距离：

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau},\quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

黏性长度尺度：$\ell_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$，于是 $y^+ = y/\ell_\nu$

上述无量纲量统称为**壁面单位**（wall units）。

摩擦 Reynolds 数：

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta_{\mathrm{ref}}}{\nu} = \frac{\delta_{\mathrm{ref}}}{\ell_\nu}$$

注意：定义必须说明 δ_{ref} 的选择（通道取半高、边界层取某厚度）；没有参考长度约定的 Re_τ 不能直接比较。

8.6 瞬时边界 vs 统计边界：边界层“边缘”在哪里？

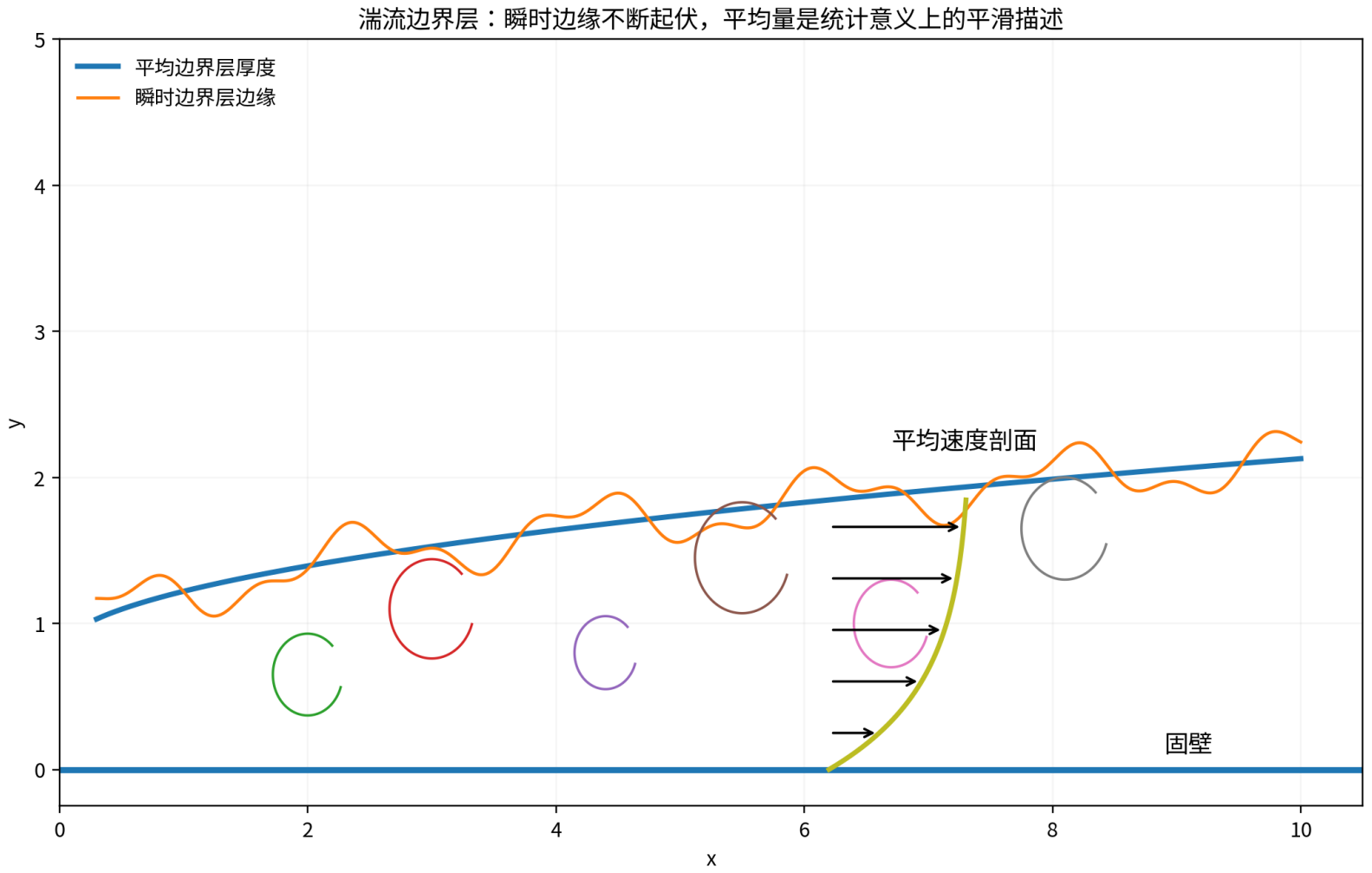


图 8.7 湍流边界层瞬时边缘与平均厚度示意（教材图）

这张图告诉我们：

- 瞬时边界随时间起伏，边缘不规则
- 平均速度剖面与平均厚度是统计意义上的平滑量

物理意义：统计描述（8.3）让"边界层厚度"成为可测的平滑量；瞬时结构（8.2 相干结构）解释起伏背后的涡运动。

统计与瞬时互补：平均厚度用于工程定义，瞬时起伏提醒边界层是"活的"。

8.6 近壁分区与壁面律：三律如何接续?

黏性底层（$y^+ \lesssim 5$）：
Reynolds 剪切很小，$\tau \approx \mu\, \mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y \approx \tau_w$
$u^+ = y^+$ （线性律）
"5"是经验量级，不是黏性突然消失的界面。

缓冲层（$5 \lesssim y^+ \lesssim 30$）：
分子黏性仍重要，Reynolds 应力快速增强，两种机制重要性相近。
这是对光滑壁规范流动的工程性概括。

对数区：
$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B$
工程常取 $\kappa \approx 0.41$、$B \approx 5$（教学约定值；DNS 文献给出 $\kappa = 0.384 \pm 0.004$）。
对数区不能只由 $y^+ > 30$ 定义（见互动）。

分区背后的尺度逻辑：
- 底层：$\tau_w = \rho u_\tau^2$、$\nu = \mu/\rho$ 代入 $\tau \approx \tau_w \rightarrow \mathrm{d}u^+/\mathrm{d}y^+ = 1$，配合壁面 $u^+ = 0$ 得线性律
- 对数区：要求 y 相对外部尺度足够小，且需要足够大的 Re_τ 形成可辨认的尺度重叠区

8.6 近壁分区总览：一张表 + 一张图

区域	典型 y+	主导机制
黏性底层	$y^+ \lesssim 5$	分子黏性
缓冲层	$5 \lesssim y^+ \lesssim 30$	黏性 + 湍流输运
对数区	$y^+ \gtrsim 30$ 的一定范围	湍流剪切占主导
外层	更远离壁面	外部尺度影响明显

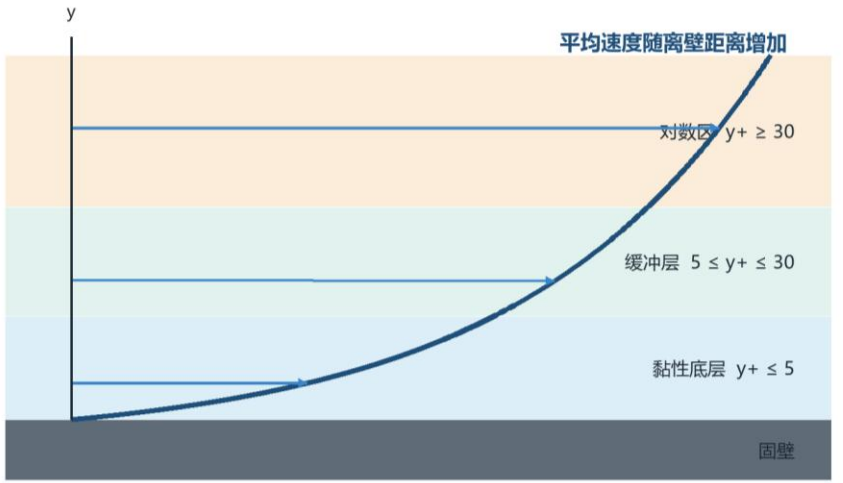


图 8.8 光滑壁湍流近壁分区与平均速度定性示意（教材图）

重要提醒：分界是光滑壁规范流动中的经验过渡范围，并非物理量突变的严格界面。
不同 Reynolds 数、压强梯度、粗糙度和流动历史会使范围移动或重叠——适合组织物理图像，不适合作为普适分区判据。

8.6 课堂互动：对数区只由 y+>30 定义吗?

关于对数区 $u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B$ 的适用条件，
以下判断正确的是——?

A 只要 $y^+ > 30$ 就成立

B 还要求 y 相对外部尺度足够小、Re_τ 足够大

C 只要 Re_τ 足够大就成立

再想一想： 为什么需要"y 相对外部尺度足够小"?
外层（外部尺度影响区）还会不会遵守同一对数律?

答案与解析见教师备注。

例 8.2　由壁面剪切应力算 uτ 与 y+

已知（水流）： $\tau_w = 0.36\text{Pa}$，$\rho = 1000\text{kg/m}^3$，
$\nu = 1.0 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$，$y = 0.20\text{mm}$
求： u_τ、y^+，并判断测点所在的近壁区域。

解： 统一单位 $y = 2.0 \times 10^{-4}\text{m}$

$$u_\tau = \sqrt{|\tau_w|/\rho} = \sqrt{0.36/1000} = 1.90 \times 10^{-2}\text{m/s}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} = \frac{(2.0 \times 10^{-4})(1.90 \times 10^{-2})}{1.0 \times 10^{-6}} \approx 3.8$$

区域判断： 由于 $y^+ \approx 3.8 \lesssim 5$，该测点位于**黏性底层的典型范围内**。
注意： "5"只标示线性近似开始明显偏离的经验量级，并非黏性作用在该处突然消失。

工程含义： 该测点处 Reynolds 剪切近似为零，速度剖面近似线性 $u^+ = y^+$——热膜/热线测速与 CFD 近壁网格都可据此设定目标位置。

8.6 总剪切与阻力：分子黏性 + 湍流输运的分工

总剪切（充分发展平行壁湍流）： $\tau_{\text{total}} = \mu \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} - \rho\overline{u'v'}$（分子黏性剪切 − Reynolds 剪切）

通道下半部（$y = 0$ 壁面、$y = h$ 中心面）： $\tau_{\text{total}}(y) = \tau_w\left(1 - \frac{y}{h}\right)$，$\tau_w = -h\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}x} > 0$

总剪切从壁面 τ_w 线性降到中心面零——直接来自平均动量守恒，**与湍流模型无关**。

这张图告诉我们：

- 壁面处脉动为零，分子黏性承担全部剪切
- 离壁后 Reynolds 剪切迅速增大并占主导
- 中心面处梯度与 $\overline{u'v'}$ 因对称性同时为零

注：总剪切直线是精确关系，分项曲线仅示意典型分工，并非特定 Re_τ 数据。

等效输运：用涡黏度时 $\tau_{\text{total}} = \rho(\nu + \nu_t)\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y$，$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_t$ 是等效输运系数，**不是新的分子物性**。

阻力：湍流摩擦阻力往往增加；但湍流边界层更抗逆压梯度、推迟分离 → 压差阻力减小。$F_D = F_{D,f} + F_{D,p}$。

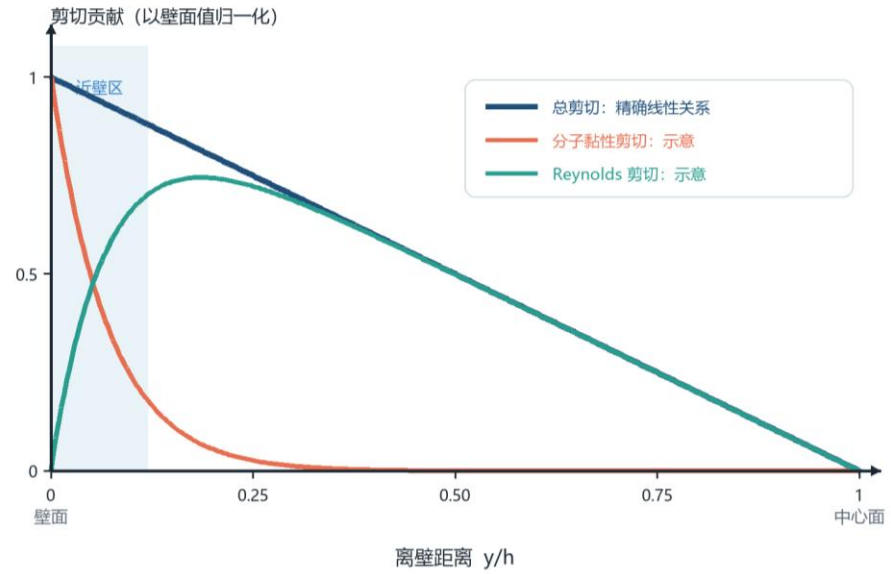


图 8.9　通道下半部总剪切分配：总剪切按 1−y/h 线性（教材图）

面对同一个 NS 方程，计算上有哪三条路?

关键分歧只有一个：哪些尺度直接求解，哪些尺度需要建模?

困惑 1　DNS 为什么算得“准”却算不起?
困惑 2　LES 与 RANS 都“建模”，建模的对象有何不同?
困惑 3　网格越密结果就一定越对吗?

本节将回答：DNS / LES / RANS 三种方法的思想与成本（8.7.1–8.7.3）、RANS 模型层级与常用模型（8.7.3）、近壁处理与 y+ 目标（8.7.4）——并配例题 8.3。

8.7 DNS：直接求解，不引入任何湍流模型

直接求解瞬时 Navier–Stokes 方程：

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 u$$

不引入湍流模型：从最大含能尺度到最小黏性耗散尺度都必须由网格和时间步解析。

能给出什么：完整瞬时速度场、压强场、涡结构、湍流统计与能量输运细节——广泛用于基础湍流研究、机理分析与湍流模型检验。

主要困难：计算成本。Re 提高 → 最小耗散尺度迅速减小 → 网格点、时间步、存储量与统计采样成本急剧增加。

拓展：DNS 成本的尺度估计（Kolmogorov 尺度）

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad \tau_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad u_K = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

大尺度估计 $\varepsilon \sim U^3/L \rightarrow \frac{\eta_K}{L} \sim Re_L^{-3/4}$；理想三维各向同性流动空间网格点数

$$N_{\text{grid}} \sim \left(\frac{L}{\eta_K}\right)^3 \sim Re_L^{9/4}$$

注意：这只是空间网格点数量级；时间步与统计采样进一步提高总成本；壁湍流还要解析近壁各向异性尺度，实际更苛刻。

8.7 课堂互动：DNS 的网格点数会是多少？

对理想三维各向同性湍流，若 $Re_L = 10^5$，
仅空间网格点数的数量级约为——？

A $\sim 10^6$
B $\sim 10^9$

C $\sim 10^{11}$
D $\sim 10^{15}$

提示： 用 $N_{\mathrm{grid}} \sim Re_L^{9/4}$ 直接估算即可。

再想一想： 这一估算为什么只适用于“理想三维各向同性”流动？
壁湍流、非均匀网格、时间步与统计采样各自还要付出什么代价？

答案与解析见教师备注。

8.7 LES：对瞬时场做空间滤波，只建模小尺度

空间滤波：

$$\widetilde{u}_i(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_\Delta(x-r)u_i(r,t)\,\mathrm{d}r$$

G_Δ 为特征宽度 Δ 的滤波核。**Δ 与网格间距 Δx、Δy、Δz 不是同一概念**；隐式滤波 LES 中两者常相关但不恒等。

滤波方程（可交换假设下）：

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\mathrm{sgs}}}{\partial x_j}$$

未解析部分 $u_i^{\mathrm{sgs}} = u_i - \widetilde{u}_i$；滤波与微分可交换对均匀卷积滤波+常宽度可成立，否则出现交换误差项。

亚格子应力（闭合问题的来源）：

$$\boxed{\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u}_i\widetilde{u}_j}$$

来自非线性项“先相乘再滤波”与“先滤波再相乘”的差异，不能仅由已解析变量精确确定 → LES 同样存在闭合问题。常用涡黏性闭合：$\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} - \frac{1}{3}\tau_{kk}^{\mathrm{sgs}}\delta_{ij} = -2\nu_t\tilde{S}_{ij}$

与 RANS 的关键差异：LES 保留随时间变化的已解析大尺度运动，只建模滤波尺度以下的作用；RANS 对全部湍流脉动的平均作用建模。两类“应力”数学形式相似，物理含义不同。

8.7 DNS / LES / RANS：同一方程，三种尺度处理

方法	解析内容	建模内容	典型成本	主要用途
DNS	全部湍流尺度	无湍流模型	极高	基础研究
LES	大尺度涡	小尺度亚格子运动	高	高保真非定常计算
RANS	平均流动	全部湍流统计效应	较低	工程设计

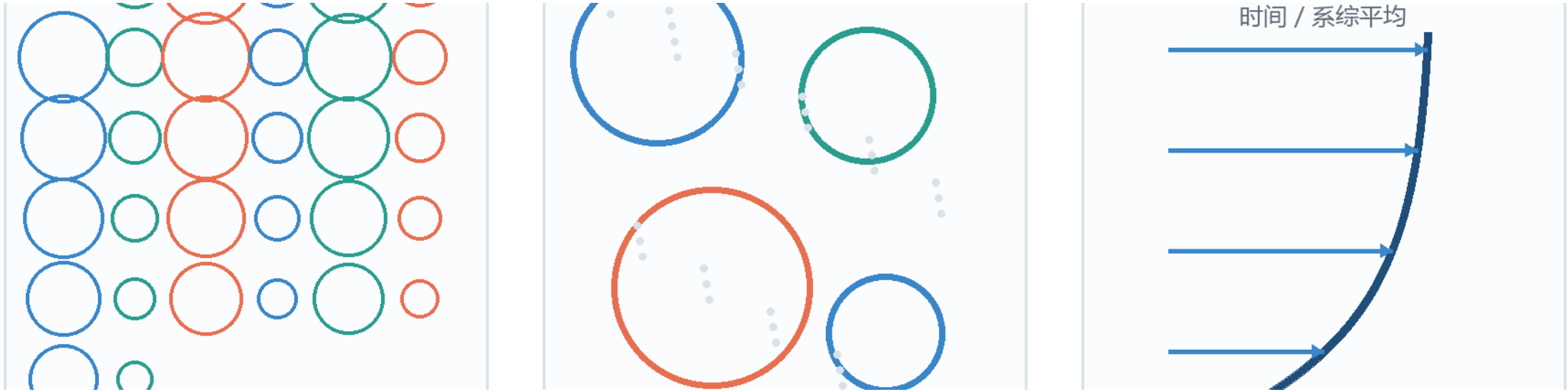


图 8.10　DNS、LES 与 RANS 对湍流尺度的不同处理方式（教材图；涡结构仅表示解析层级，不代表计算数据）

例 8.3　按研究目标选择 DNS、LES 或 RANS

问题：希望获得高 Reynolds 数圆柱尾迹中大尺度涡脱落的**瞬时结构、主频及其对升力波动的影响**。资源能承担非定常三维计算，但不足以解析最小黏性耗散尺度。应优先选哪种方法？

解：优先选择 **LES**。

- DNS 能解析全部尺度，但题设已说明资源不足以解析最小尺度 → 不可行
- RANS 主要面向平均流动；即使非定常 RANS，全部湍流统计效应仍由模型闭合，对分离尾迹中瞬时大尺度结构的保真度有限
- LES 直接解析与几何密切相关的大尺度非定常涡，只对滤波尺度以下运动建模 → 与目标最匹配

对照：若目标是大量几何方案间快速比较**时间平均阻力** → RANS 更经济；若研究小尺度统计且 Re 与资源允许 → DNS 才可能成为首选。

8.7 RANS 模型层级：闭合“什么”不同，不是选型说明书

模型 = 对未封闭相关量的结构假设（不是按几何名称选的公式包）。

层级（按"闭合什么"）：

- 零方程：代数式 ν_t（混合长度）
- 一方程：+1 个湍流尺度变量输运方程
- 两方程：+2 个（k-ε、k-ω、SST）
- RSM：直接求解多个 Reynolds 应力分量

两种常用两方程模型的尺度关系：

$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ （k 给速度尺度，ε 给耗散速率）

$\nu_t \sim \frac{k}{\omega}$ （ω 给湍流时间尺度，近壁处理方便）

SST 用混合函数：近壁保持 k–ω 行为、外层转向 k–ε 特性，并对涡黏度加剪切应力限制。

模型	主要求解/构造量	ν_t 典型尺度关系	主要假设与局限
混合长度	ℓ_m	$\ell_m^2 \lvert d\bar{u}/dy \rvert$	假定局部剪切决定输运；离开简单附着剪切流需重新检验
k–ε	k, ε	$C_\mu k^2/\varepsilon$	标量涡黏度联系应力与平均应变；强各向异性、非平衡仍受限
k–ω	k, ω	k/ω	线性涡黏性框架；外层结果可能对自由流 ω 条件敏感
SST	k, ω+混合/限制	修正的 k/ω	混合与限制改善部分边界层问题；不消除线性涡黏性形式误差
RSM	多个 Reynolds 应力	不依赖单一标量 ν_t	放宽单标量涡黏度假设；压强–应变、耗散等项仍需闭合

重要提醒：网格加密不能消除模型形式误差；模型结果须在目标流动、Re、压强梯度、粗糙度、边界条件范围内与独立证据比较（validation）。

8.7 CFD 近壁处理：y+ 目标必须与处理方式绑定

近壁处理	第一层网格需表达什么	常用量级与必要说明
壁面解析 DNS / LES	直接解析黏性底层和近壁梯度	第一层中心常取 $y^+ \sim O(1)$；还必须同时检查流向、展向和时间分辨率
解析至壁面的低 Re RANS	由模型方程和离散直接连接到无滑移壁面	常以 $y^+ \approx 1$ 作初始设计量级；目标随模型、离散方法和壁面量而变
采用壁面函数的 RANS	第一层点落在所用壁面律及其校准范围内	经典对数律壁面函数通常要求避开缓冲层并进入对数区，常见起点约 $y^+ \gtrsim 30$；具体范围必须服从模型说明
壁面建模 LES	用壁面模型连接未解析近壁区与外层 LES	不能只凭一个 y^+ 判断；还需说明滤波尺度、壁面模型、外层网格和非平衡效应

网格设计流程：uτ 初值来自经验估计或先导计算 → 得到第一层高度初值 → 正式计算后用所得 τw 回算 y+ 的空间分布。
即便第一层 y+ 达标，若法向总层数、增长率、流向/展向分辨率、入口湍流或壁面模型不合适，计算仍可能不可信。

y+ 是连接物理尺度、网格尺度与壁面处理假设的诊断量，不是脱离模型语境的单项合格证。

方程有了，如何让计算结果可信?

本节只建立方法链，不展开软件操作与算法推导：
控制方程 → 空间与时间离散 → 代数方程组 → 迭代求解 → verification → validation
四个必须回答的问题：连续方程怎么变成有限个代数方程？时间怎么向前推进？不可压缩条件怎样满足？结果怎样证明与网格、时间步无关并具有物理可信度?

与 8.7 的关系：DNS/LES/RANS 回答"哪些尺度求解、哪些建模"；8.8 回答"方程如何离散、如何求解、如何证明可信"。
核心立场：CFD 是求解黏性流动控制方程的工具，不是替代理论分析的"黑箱"。

8.8 有限体积法：从守恒方程到代数方程组

一般输运变量 φ 在固定控制体 V_P 上的积分守恒方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{V_P}\rho\,\phi\,\mathrm{dV}+\oint_{\partial \mathrm{V_P}}\rho\,\phi\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}\,\mathrm{dA}=\oint_{\partial \mathrm{V_P}}\Gamma_\phi\,\nabla\phi\cdot\mathrm{n}\,\mathrm{dA}+\int_{\mathrm{V_P}}\mathrm{S}_\phi\,\mathrm{dV}$$

左端：储存量变化 + 对流通量；右端：扩散通量 + 源项。

FVM 的核心思想：

把计算域分成许多相邻控制体，近似每个面（face）的通量。

相邻控制体共享同一面 → 一个控制体流出的通量以相反符号进入相邻控制体 → 离散方程**天然保留局部守恒结构**。

完成面通量、梯度与源项近似后，每个控制体得到：

$$a_P\phi_P=\sum_N a_N\,\phi_N+b$$

三种离散方法的概念区别：

- FDM：网格点差分近似微分算子，规则网格直观高效
- FVM：控制体积分守恒出发、面通量连接相邻单元，工程 CFD 应用广泛
- FEM：弱形式、试函数与基函数建立离散方程，适合复杂几何与多物理场

三者都把连续问题转成有限维代数问题；差别在离散出发点，不在物理定律。

由此：把所有控制体方程组装起来 → 大型稀疏代数方程组 → 交给迭代求解器（8.8.5 讨论"残差小≠离散解接近连续解"）。

8.8 离散误差：阶数高 ≠ 粗网格也准

截断误差与离散误差：连续导数和面通量只能由有限网格上的数值近似表示。
网格特征尺度 h 下，若光滑解区域满足 $E_h \sim Ch^p$，则称该格式具有 p 阶精度。**阶数描述渐近细网格区中的误差衰减速度，并不保证任何一张粗网格已经准确。**

一阶迎风：通常较稳定，但可能产生明显**数值扩散**，把剪切层、尾迹和涡结构过度抹平。
中心格式：数值耗散较小，但在陡峭梯度附近可能产生**非物理振荡**。
实际精度还受网格非正交性、单元长宽比、边界曲率表示与梯度重构影响。

数值耗散 ≠ 分子黏性或湍流模型：
粗网格或低阶格式把速度梯度抹平，所得"耗散"来自离散误差，**不能自动解释为真实黏性耗散或合理的 SGS / RANS 建模**。
判断能量损失来源时，必须同时检查物理模型、网格和离散格式。

教学提醒：高 Re 湍流中"抹平"的物理原因很多——分子耗散、SGS/RANS 建模、数值扩散三者必须分开判断。
这也是"网格加密能减小数值误差、却不能消除模型形式误差"（8.7）在离散层面的对应表现。

例 8.4　近壁第一层高度与显式时间步的联合估算

已知（水流）： $\nu = 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$，预估 $u_\tau = 0.10\,\mathrm{m/s}$，$\Delta x = 2.0\,\mathrm{mm}$，$U_c = 2.0\,\mathrm{m/s}$，显式格式 $Co \le 0.5$，目标解析频率 $f = 20\,\mathrm{Hz}$。

求： (1) $y^+ = 1$ 时第一层网格中心高度；(2) $y^+ = 50$ 时对应高度；(3) CFL 最大时间步；(4) 每周期时间步数。

解： 由 $y^+ = y u_\tau / \nu$：

(1) $y_1 = \dfrac{(1)(1.0\times10^{-6})}{0.10} = 1.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} = 10\,\mu\mathrm{m}$

(2) $y_{50} = \dfrac{(50)(1.0\times10^{-6})}{0.10} = 5.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.50\,\mathrm{mm}$

(3) $\Delta t \le Co_{\max}\dfrac{\Delta x}{U_c} = 0.5 \times \dfrac{2.0\times10^{-3}}{2.0} = 5.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$

(4) $T_f = 1/f = 0.050\,\mathrm{s}$，$N_T = T_f/\Delta t = 100$ 步/周期

结果解释：

- y^+ 控制壁面法向分辨率，CFL 约束时间推进——**两者针对不同离散尺度**
- $10\ \mu\mathrm{m}$ 说明近壁网格必须高度各向异性
- $y^+ = 50$ 仅换算另一种量级；只有当所用壁面函数明确把第一层点置于该范围时才具建模意义
- 100 步/周期较充分，仍需减小 Δt 检查振幅、相位与统计量是否稳定

补充： 若改用隐式格式，稳定性限制可能放宽，但目标频率的精度要求不会自动消失——大时间步仍可能损失瞬态精度。

8.8 不可压缩条件怎样满足？压强–速度耦合

问题：不可压缩条件 $\nabla \cdot u = 0$ 没有给出压强自己的独立演化方程。压强的作用是调整速度场，使更新后的速度满足无散约束 → 速度与压强不能分别独立求解。

投影思想（概念例子）：先用不含新时刻压强的方程得预测速度 u^*，再用压强梯度修正：

$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla p^{n+1}$，由 $\nabla \cdot u^{n+1} = 0$ 得概念性压强 Poisson 方程 $\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla \cdot u^*$

工程软件中的常见方法：

- 投影法 / 压强修正法
- SIMPLE、PISO 等

共同目标：让离散动量方程与离散连续性方程同时成立。

教材不展开算法细节，只要求建立"压强是速度场的约束乘子"这一图像。

物理图像：不可压缩流动中压强"即时"调整以维持无散——声波以无穷大速度传播的理想化。

与本章的联系：RANS 平均方程中的 $\bar{p}$ 同样没有独立演化方程，数值上仍需压强–速度耦合处理。

易错点：不要把"压强 Poisson 方程"理解为压强自身有独立的时间演化。

8.8 三种收敛不是一回事 + Verification 与 Validation

三种收敛（教材明确区分）：

- **迭代收敛**：固定网格和时间步上，把离散代数方程解到足够小的残差
- **网格/时间步收敛**：离散尺度继续减小时，关注量趋向稳定或可外推的极限
- **物理正确性**：所选控制方程、边界条件和模型能够描述真实问题

前两项通过，不自动保证第三项成立。

网格独立性基本流程：

1. 每组网格先保证残差与关注量迭代历史可接受
2. 至少三组系统加密网格，保持几何、边界、模型与格式一致
3. 同时比较整体量与局部量：压降、阻力系数、涡脱落频率、分离位置、速度剖面、壁面 y+
4. 非稳态继续减小 Δt 检查平均量、振幅、相位、频谱
5. 报告网格数、加密策略、时间步、格式与变化百分比

Verification vs Validation：

- Verification（求解验证）："方程算对了吗？"——解析解/制造解、基准算例、守恒检查、残差、网格与时间步收敛、离散误差估计
- Validation（模型确认）："算的是正确问题吗？"——与独立实验或可靠观测比较，并考虑实验、输入与数值不确定度

模型参数用一组数据标定后再与同一组数据吻合，不能构成独立 validation。

CFD 报告应说明：方程、模型与边界、网格/时间步、格式与收敛准则、verification/validation 证据、剩余不确定性。

8.9 Re 提高后，黏性去了哪里?

Reynolds 数与计算难度： Re 提高 →
- 边界层变薄、近壁速度梯度增大
- 湍流尺度范围扩大、最小耗散尺度减小
- 相关时间尺度范围扩大

因此 Re 不仅控制流动物理，也直接控制数值计算难度——无量纲参数在理论分析与计算方法中的统一作用（8.7 的 $N_{\mathrm{grid}} \sim Re^{9/4}$ 即一例）。

Re≫1 时分子黏性并没有消失：
- 固壁附近足够小的 y^+ 区域仍由分子黏性控制动量输运（8.6）
- 湍流能量经尺度间传递后，最终仍由分子黏性在小尺度耗散（8.2）
- 边界层厚度、壁面剪切与分离问题都离不开黏性作用（第 6、7 章）

不能简单说"Re 很大，黏性可忽略"。

更准确的表述：

黏性不再控制全部流场的大尺度运动，但仍然决定近壁行为和最终能量耗散。

而"壁面 → 无滑移 → 速度梯度 → 剪切应力"这一条黏性流动主线（第 1、2 章起）始终没有改变。

8.9 全书四条知识主线

主线一 · 黏性与动量输运： $\tau = \mu\,\partial u/\partial y$ → 动量扩散 → Stokes 第一问题 → 边界层 → 壁湍流
主线二 · 无量纲化与主导平衡： Navier–Stokes 方程 → 无量纲化 → Re → 尺度分析 → 主导平衡

主线三 · Reynolds 数改变流动物理：
$Re \ll 1$ → Stokes flow；$Re = O(1)$ → 完整黏性流动；$Re \gg 1$ → 边界层 → 分离与尾迹 → 转捩与湍流

主线四 · 解析、渐近与数值方法互相补充：
精确解提供基准与物理图像；尺度分析和渐近方法识别主导平衡；CFD 通过离散处理复杂几何和非线性问题，但必须经过网格/时间步检查、verification 和 validation。

本章在全课程中的位置： 第 8 章把主线三的终点（转捩与湍流）与主线四（数值方法）合拢——"黏性作用 → 方程 → 尺度 → 流动结构 → 工程应用"闭环。

8.9 面对一个新流动问题，先问九个问题

1. 控制方程是什么?
2. 几何与边界条件是什么?
3. 合适的特征尺度是什么?
4. 关键无量纲参数是什么?
5. 哪些项构成主导平衡?

6. 是否存在边界层、剪切层、尾迹或其他多个尺度?
7. 需要解析、实验还是数值方法?
8. 若用 CFD：DNS、LES 还是 RANS，为什么?
9. 结果是否经过守恒、迭代收敛、网格/时间步检查、verification 与 validation?

结论：面对新问题，不应首先问"有没有现成公式"，而应依次问这九个问题。
这种分析习惯比记忆大量孤立公式更重要——它把"物理 → 方程 → 尺度 → 流动结构 → 方法"串成一条可迁移的思维链。

8.10　本章小结：十一件事

1. 湍流是 NS 方程的复杂运动状态：扰动增长 → 非线性 → 三维化；统计规律与相干结构互补。
2. Reynolds 分解与乘积平均引入脉动相关：Reynolds 应力是平均动量通量而非分子本构应力 → 闭合问题。
3. 能量链：k 由平均剪切生产、经输运与尺度间传递，最终以 $\varepsilon = 2\nu\overline{s'_{ij}s'_{ij}}$ 耗散；含能区 / 惯性区 / 耗散区呈现同一能量链。
4. 壁面单位由 u_τ 与 ℓ_ν 构造，Re_τ 比较外部尺度与黏性长度；三区范围是经验过渡范围。
5. 通道总剪切 = 分子剪切 + Reynolds 剪切，严格满足 $\tau_{\text{total}} = \tau_w(1 - y/h)$；壁面处 Reynolds 剪切为零。
6. DNS 解析全部尺度；LES 解析滤波尺度以上运动并闭合亚格子作用；RANS 求平均流并闭合全部统计效应。滤波尺度、网格尺度、微分交换条件须分别说明。
7. 涡黏性、两方程、SST、RSM 都含结构假设与校准范围；网格加密不能消除模型形式误差。
8. y^+ 目标必须与壁面解析 / 壁面函数 / 壁面建模绑定，不是普适质量阈值。
9. Re 升高扩大需解析的空间与时间尺度范围；Kolmogorov 尺度说明 DNS 成本，但单一幂律不是统一成本公式。
10. FVM 离散、时间推进、CFL、压强–速度耦合把方程变成可计算系统，同时引入需量化的数值误差。
11. 迭代收敛 ≠ 网格/时间步收敛 ≠ 物理正确；verification 与 validation 必须分别检查。

形成性评价 1　概念判断（3 题 · 2 分钟）

1. Reynolds 应力 $-\rho\overline{u'v'}$ 在平均动量方程中的角色是——
A 分子本构应力　B 平均动量通量（由脉动相关产生）　C 湍动能　D 能量耗散率

2. 关于湍动能谱，下列说法正确的是——
A 含能区能量来自分子耗散　B 惯性区大致满足 $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$　C 耗散区由惯性主导　D 能谱与 Reynolds 数无关

3. 通道流总剪切 $\tau_{\text{total}}(y) = \tau_w(1 - y/h)$ 的来源是——
A 特定湍流模型的假设　B 平均动量守恒的积分结果，与模型无关　C 仅对层流成立　D 经验拟合

形成性评价 2　估算与应用（3 题 · 3 分钟）

4. 估算。水流 $u_\tau = 0.05\mathrm{m/s}$、$\nu = 1.0 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，第一层网格中心 $y = 1.0 \times 10^{-5}\mathrm{m}$。估算 y^+，并判断第一层点落在哪个区域？
（$y^+ = yu_\tau/\nu$，三区界线约 5 / 30）

5. 方法选择。要研究高 Re 圆柱尾迹中大尺度涡脱落的瞬时结构、主频及其对升力波动的影响；资源不足以解析最小耗散尺度。优先选 DNS / LES / RANS 中的哪一种？

6. 判断。某 CFD 计算代数残差已降到 10^{-8}。能否据此宣布"计算结果正确"？还应检查哪些环节？

易错点回顾　六组易混概念

1. uτ 不是实际速度——它是从 τ_w 构造的壁面速度尺度。
2. v_eff=v+v_t 不是分子物性——是采用模型后的等效输运系数。
3. LES 的 Δ ≠ 网格间距 Δx——Δ 是滤波/模型定义量，高度各向异性网格不能只用一个 Δ_g。

4. 三种收敛不是一回事——迭代收敛 ≠ 网格/时间步收敛 ≠ 物理正确。
5. y+ 不是普适合格证——目标必须与壁面解析/壁面函数/壁面建模绑定。
6. 数值耗散 ≠ 物理黏性/模型——网格加密不能消除模型形式误差。

另外三处必须写清楚条件的量：

- 对数律 $u^+ = (1/\kappa)\ln y^+ + B$：$\kappa \approx 0.41$、$B \approx 5$ 是教学约定值；对数区不能只由 $y^+ > 30$ 定义
- $Re_\tau = u_\tau \delta_{\mathrm{ref}}/\nu$：必须说明 δ_{ref} 的选择，否则不能直接比较
- $N_{\mathrm{grid}} \sim Re_L^{9/4}$：仅理想三维各向同性区域的空间网格点数量级，不是所有 DNS 的统一成本律

课后任务与下章衔接

教材习题（★ 必做）：

- 8.1　三种平均的定义与适用条件；为什么空间平均要求统计齐次
- 8.3　层流、转捩与湍流的基本区别
- 8.4　为什么不能用普适 Re 作为层流–湍流分界
- 8.6　$\overline{u'}=0,\overline{v'}=0$ **是否意味着** $\overline{u'v'}=0$
- 8.7　证明 $\overline{fg}=\bar{f}\,\bar{g}+\overline{f'g'}$，并说明其对 RANS 推导的意义

选做：8.2（各态历经）、8.5（$\overline{u'}=0$）

思考与讨论（教材 8 章末）：

- 湍流是不是一种新的流体本构性质？为什么？
- Reynolds 应力为什么叫"应力"，却又不是真正的分子应力？
- 为什么高 Re 并不意味着分子黏性"没有作用"？
- 为什么 RANS、LES、DNS 都是 NS 方程的不同计算层级？
- 为什么 verification 通过后仍必须进行 validation？
- 面对陌生流动，为什么"先无量纲化和尺度判断"比"先跑 CFD"更合理？

课程收束与衔接：第 8 章是《黏性流体力学》的终点，也是后续课程的入口：

- 空气动力学 / 飞行器设计：边界层、转捩、分离与阻力（第 6–8 章）直接支撑气动外形与阻力预测
- 传热学 / 热流体系统：湍流输运强化（第 8 章）是换热系数估算的基础
- 计算流体力学课程：本章 8.7–8.8 的尺度处理、离散、CFD 可信度框架是入门地图
- 全课程主线至此闭环：黏性作用 → 方程 → 尺度 → 流动结构 → 工程应用 → 数值计算